

## Estimation modale haute résolution

Kerem Ege<sup>1</sup>, Xavier Boutillon<sup>1</sup>, Bertrand David<sup>2</sup> & José Lozada<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, Département de Mécanique, École polytechnique, UMR 7649  
91128 Palaiseau Cedex

<sup>2</sup> Télécom' Paris, 46 rue Parrault, 75634 Paris Cedex 13  
[kerem.ege@lms.polytechnique.fr](mailto:kerem.ege@lms.polytechnique.fr), [boutillon@lms.polytechnique.fr](mailto:boutillon@lms.polytechnique.fr), [bertrand.david@enst.fr](mailto:bertrand.david@enst.fr)

### Résumé :

*En analyse modale, la transformée de Fourier, qui consiste à projeter un signal sur un ensemble de sinusoides, est adaptée aux cas où le signal décroît peu (amortissement modaux faibles). Dans le cas contraire, la résolution intrinsèquement limitée de la transformée de Fourier peut devenir rédhibitoire. Des techniques haute résolution (algorithme ESPRIT) permettent d'analyser le signal directement comme somme de sinusoides exponentiellement décroissantes (fréquences complexes) et sont donc mieux adaptées pour estimer des modes dont l'écart fréquentiel est proche de l'élargissement spectral dû à l'amortissement. Une procédure additionnelle par simulation permet d'évaluer les incertitudes sur les résultats (méthode du type Monte-Carlo). Deux applications sont présentées : séparation entre le mouvement transitoire de corps rigide et les premiers modes de vibration d'une touche de piano, et séparation de deux modes proches d'une plaque carrée amortie.*

### Abstract :

*The standard modal analysis technique makes use of the Fourier transform which projects the signal on a basis of sinusoids. When the signal components have a fast decay rate (strong modal damping), the intrinsically limited resolution of the Fourier transform makes it inefficient to estimate damped modes with close frequencies. High resolution techniques (ESPRIT algorithm), which project the signal on a basis of exponentially damped sinusoids, offer an interesting alternative. In order to evaluate the uncertainties on the results, we propose an additional procedure based on simulation (Monte-Carlo type method). Two applications are presented: (a) the separation of the rigid body motion from the first modes of vibration of a piano key, (b) the separation between two twin modes of a damped square plate.*

### Mots-clefs :

**Analyse modale ; Séparation de modes ; Evaluation des incertitudes**

## 1 Introduction

L'analyse modale traditionnelle utilise la transformée de Fourier pour estimer la fréquence modale, l'amortissement modal ainsi que l'amplitude complexe de la réponse vibratoire rapportée au spectre de l'excitation. Cette transformée a une résolution liée au fenêtrage temporel du signal ; elle est donc mal adaptée pour estimer des modes dont l'écart fréquentiel est proche de l'élargissement spectral dû à l'amortissement.

La solution que nous proposons consiste à analyser la réponse temporelle d'une structure à une excitation de nature impulsionnelle en construisant dans un premier temps sa réponse impulsionnelle (Lozada *et al.* (2006)), et en traitant ensuite cette réponse par l'algorithme ESPRIT qui analyse le signal directement comme somme de sinusoides exponentiellement décroissantes (fréquences complexes). Nous présentons ensuite une procédure additionnelle par simulation pour évaluer les incertitudes sur les résultats (méthode de type Monte-Carlo). Deux applications sont présentées : séparation entre le mouvement transitoire de corps rigide et les

premiers modes de vibration d'une touche de piano, séparation de deux modes jumeaux d'une plaque carrée amortie.

## 2 Présentation de la méthode

### 2.1 Estimation de la réponse impulsionnelle

Expérimentalement, on obtient généralement les modes propres d'une structure en analysant sa réponse à une excitation impulsionnelle ponctuelle. En pratique, l'excitation n'est jamais strictement impulsionnelle. Dans l'analyse modale traditionnelle, chaque réponse est donc au préalable normalisée par la transformée de Fourier de l'impulsion qui l'a provoquée. Ici, nous estimons la réponse impulsionnelle  $\gamma_{imp}(t)$  (en notant qu'une impulsion génère une vitesse initiale  $v_{imp}(0)$  généralement non nulle) en deux temps :

(a) Estimation du filtre  $g$ , à réponse impulsionnelle finie, qu'il faudrait appliquer à la force  $f_{mes}(t)$  exercée par le marteau d'impact sur la structure pour que cette force devienne une impulsion. Pour des raisons de causalité, cette impulsion n'intervient pas à  $t = 0$  mais est décalée dans le temps de  $p$  échantillons :

$$f_{mes} * g = \delta_p \quad (1)$$

(b) Calcul de  $\gamma_{imp}$  à partir de la réponse réelle  $\gamma_{mes}$ . Une structure initialement à l'équilibre et au repos, soumise à la force  $f_{mes}$ , prend l'accélération  $\gamma_{mes}$  donnée par :

$$\gamma_{mes} = \gamma_{imp} * f_{mes} + v_{imp}|_{t=0} \cdot f_{mes} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \gamma_{imp} = (\gamma_{mes} * g)_{-p} - v_{imp}|_{t=0} \cdot \delta \quad (3)$$

où  $(\cdot)_{-p}$  indique le décalage de  $-p$  échantillons.

### 2.2 Analyse modale par méthode haute résolution ESPRIT

L'algorithme ESPRIT [Roy *et al.* (1986), Roy *et al.* (1989)] effectue une analyse paramétrique d'un signal supposé composé de  $K$  exponentielles complexes et d'un bruit blanc  $bb$  (équation 4).

$$s(t) = s_{mod}(t) + bb(t) \quad \text{avec} \quad s_{mod}(t) = \sum_{k=1}^K a_k e^{i\phi_k} e^{-\alpha_k t + 2i\pi f_k t} = \sum_{k=1}^K b_k z_k^t \quad (4)$$

où les  $b_k$  sont les amplitudes complexes et les  $z_k$  les pôles du signal  $s_{mod}$ .

Cette méthode fait partie de la famille des méthodes "sous-espaces" qui projettent le signal sur un sous-espace que nous appelons "signal modal" et sur un sous-espace "bruit". Dans le cas d'un signal physique réel (issue par exemple d'une analyse modale),  $K'/2$  sinusoides amorties sont représentées par  $K'$  exponentielles complexes.

On fixe *a priori* les paramètres d'analyse suivants, qui doivent vérifier plusieurs conditions :

- $K > K'$ ,  $K'/2$  étant le nombre estimé de composantes modales
- $N > K$ ,  $N$  étant le nombre de points analysés (horizon d'observation)
- le choix optimal pour la dimension de l'espace bruit (qui n'apparaît pas explicitement ici) est de  $2K$ , d'après Badeau (2005).

Les pôles  $z_k$  de la partie modale du signal sont calculés en utilisant la propriété d'invariance rotationnelle de la matrice de Vandermonde des composantes exponentielles (c'est à dire la possibilité d'exprimer par simple multiplication les composantes déterministes à des instants

successifs en fonction de leurs valeurs aux instants précédents). Les amplitudes complexes  $b_k$  sont ensuite estimées par recherche en moindres carrés sur  $s(t)$ .

La procédure mise en œuvre dans notre étude est représentée figure 1. Elle consiste à analyser de manière paramétrique la réponse impulsionnelle  $h$  à l'aide de l'algorithme ESPRIT pour estimer les fréquences, amortissements, amplitudes et phases des composantes modales.

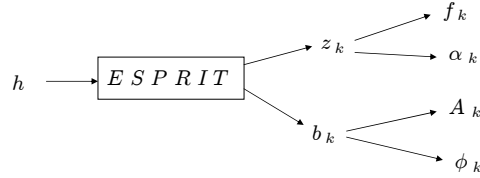


FIG. 1 – Schéma de la procédure

### 2.3 Evaluation des incertitudes par simulation

Nous avons évalué l'incertitude due au bruit sur les résultats de l'analyse. L'incertitude correspond à la dispersion des résultats lorsque la procédure exposée ci-dessus est appliquée au signal modal effectif  $s_{mod}(t) + bb(t)$  pour un grand nombre de réalisations de bruit blanc  $bb$ , à rapport signal sur bruit donné (méthode de Monte-Carlo).  $s_{mod}$  est synthétisé à partir des résultats  $f_{k,ref}$ ,  $\alpha_{k,ref}$ ,  $A_{k,ref}$  et  $\phi_{k,ref}$  d'une première analyse dite de référence. La réponse impulsionnelle simulée s'écrit alors :

$$h_s(t) = s_{mod}(t) + bb(t) = \sum_{k=1}^K b_{k,ref} z_{k,ref}^t + bb(t) \quad (5)$$

L'incertitude sur la fréquence modale (par exemple) est évaluée de la manière suivante :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_i (f_i - \bar{f})^2}}{\bar{f}} \text{ avec } \bar{f} = \frac{1}{N_b} \sum_i f_i \text{ et } N_b \text{ le nombre d'estimation de } f.$$

À titre d'illustration, la figure 2 présente les résultats obtenus pour la composante modale à 1141 Hz de la plaque carrée étudiée au §3.2. Trois cents réalisations de bruit ont été effectuées, pour deux niveaux de bruit différents.

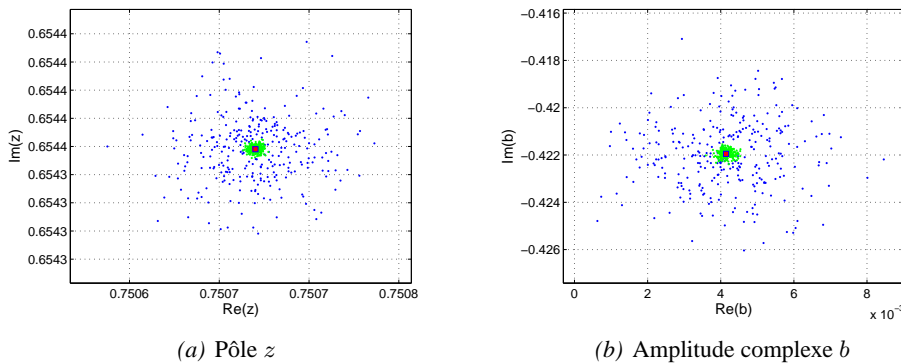


FIG. 2 – Pôle et amplitude complexe d'une composante estimée par ESPRIT pour deux rapports signal sur bruit donnés. Rouge : signal de référence. Bleu : RSB=40dB. Vert : RSB=60dB

Pour notre cas d'étude :

- pour un RSB de 40dB :  
 $\Delta(f)/f = 3.3 \cdot 10^{-5}$  ;  $\Delta(\alpha)/\alpha = 5.9 \cdot 10^{-3}$
- pour un RSB de 60dB :  
 $\Delta(f)/f = 3.3 \cdot 10^{-6}$  ;  $\Delta(\alpha)/\alpha = 5.8 \cdot 10^{-4}$

### 3 Applications

#### 3.1 Séparation vibration - mouvement de corps rigide

Pour les besoins d'une autre étude, nous nous sommes intéressés au mouvement d'une touche de piano soumise à une force d'essai de type échelon. La touche (figure 3) peut être considérée comme une poutre de section rectangulaire en rotation autour d'un point fixe.

Dans l'expérience, l'amplitude de la vibration est du même ordre de grandeur que celle du mouvement de corps rigide et les domaines spectraux du mouvement transitoire de corps rigide et de la vibration en basse fréquence se recouvrent (figure 4).

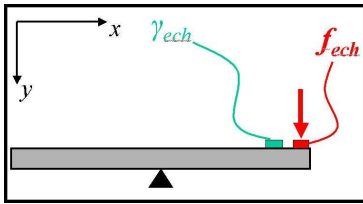


FIG. 3 – Touche de piano

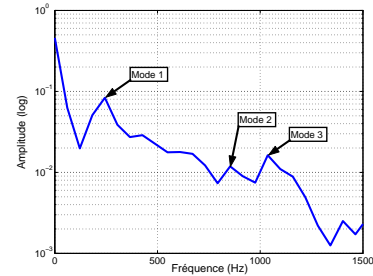


FIG. 4 – Spectre du mouvement de la touche

Afin d'extraire le mouvement de corps rigide de la mesure, nous avons besoin d'une décomposition modale au point de mesure,  $\gamma_{imp}(t) = \sum_k A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) e^{-\alpha_k t}$ , ainsi que de  $v_{imp}(0)$ .

La réponse impulsionnelle  $\gamma_{imp}(t)$ , et la vitesse initiale  $v_{imp}(0)$ , sont obtenues pour un essai auxiliaire où la touche est soumise à une impulsion. La réponse impulsionnelle est alors reconstituée comme indiqué plus haut. La vitesse initiale est déterminée par inspection et l'analyse ESPRIT fournit la décomposition en sinusoïdes amorties. On peut alors estimer l'accélération vibratoire  $\gamma_{vib}$  en réponse à l'excitation  $f_{ech}$  d'orgine :

$$\gamma_{vib}(t) = \left( \sum_k A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) e^{-\alpha_k t} \right) * f_{ech}(t) - v_{imp}(0) \cdot f_{ech}(t) \quad (6)$$

L'accélération de corps rigide  $\gamma_{rig}$  (figure 5) est extraite par soustraction :  $\gamma_{rig} = \gamma_{ech} - \gamma_{vib}$

#### 3.2 Séparation de deux modes proches d'une plaque carrée amortie

La seconde application de la méthode est l'analyse modale partielle d'une plaque carrée en aluminium de 30 cm de côté et de 1.9 mm d'épaisseur, suspendue par deux élastiques. Les conditions aux limites sont considérées comme libre-libre. La plaque est amortie avec de la mousse collée de part et d'autre de sa surface.

La plaque carrée admet en principe une série dédoublée de modes propres "jumeaux" de même fréquences et de déformées modales déduites l'une de l'autre par rotation de 90°.

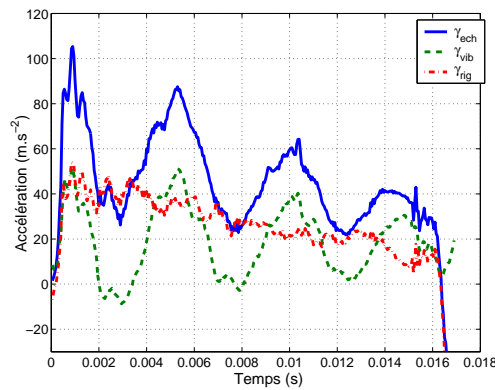


FIG. 5 – Mouvement global mesuré : "—" ; mouvement vibratoire estimé : "—" ; et mouvement de corps rigide reconstitué à l'extrémité de la touche : " - . -."

La figure 6 présente les modes jumeaux (2,1) et (1,2). Une dissymétrie, même faible, dans le système lève la dégénérescence : les deux modes jumeaux se différencient alors légèrement en fréquence (dans notre cas  $\Delta f = 3$  Hz, voir plus loin) et en amortissement.

En analyse modale, il est important de considérer le recouvrement modal  $\mu$ , défini à partir de la densité modale  $d$ , de la fréquence  $f$ , et de l'amortissement  $\alpha$  :  $\mu = 2d f \alpha / \omega = d \alpha / \pi$ . Dans notre cas, les deux modes jumeaux produisent une densité modale apparente (à cette fréquence) de  $1/\Delta f$  soit 0.3 mode/Hz. Leur amortissement  $\alpha$  est de l'ordre de  $20 \text{ s}^{-1}$  (voir plus loin) ; le recouvrement modal est donc supérieur à 200%. L'analyse modale traditionnelle par transformée de Fourier ne permet pas de séparer les deux modes (voir figure 7).

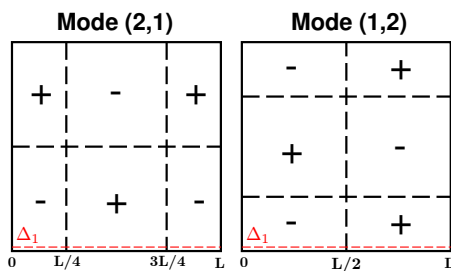


FIG. 6 – Modes jumeaux (2,1) et (1,2) d'une plaque carrée de longueur  $L$ .  $\Delta_1$  correspond à la ligne inférieure de la plaque où les mesures vibratoires ont été effectuées.

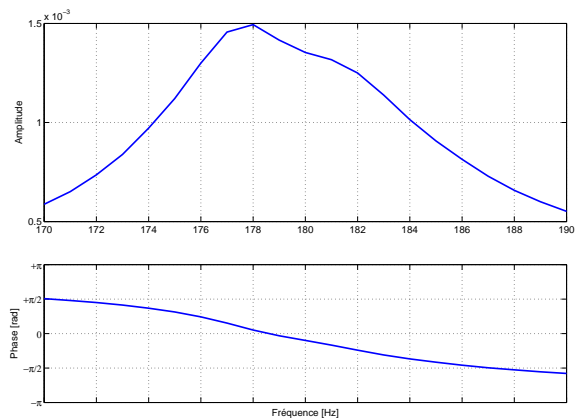


FIG. 7 – Spectre de l'accélération au point  $3L/4$  obtenu par transformée de Fourier sur 10000 points (1 seconde). Le saut de phase d'environ  $\pi$  indique la présence de deux modes.

En vue de séparer ces deux modes proches, pour lesquels l'écart fréquentiel est proche de l'élargissement spectral dû à l'amortissement, nous avons effectué plusieurs mesures vibratoires sur la ligne inférieure  $\Delta_1$  de la plaque (voir figure 6). L'excitation est donnée par impact sur 9 points de  $\Delta_1$  et le mouvement mesuré par un accéléromètre fixe.

Pour chaque point de mesure, fréquences, amortissements, amplitudes et phases sont calculés selon la procédure exposée plus haut. La fréquence modale et l'amortissement modal sont

considérés comme la moyenne des déterminations de la fréquence et de l'amortissement en chaque point, pondérées par les amplitudes estimées.

Les résultats sont les suivants : pour le mode (2,1),  $f_{(2,1)} = 177.8$  Hz et  $\alpha_{(2,1)} = 17.4$  s<sup>-1</sup> ; pour le mode (1,2),  $f_{(1,2)} = 181.0$  Hz et  $\alpha_{(1,2)} = 22.5$  s<sup>-1</sup>. Les déformées modales (amplitude et phase) sont présentées sur la figure 8. Elle sont tout à fait conforme à ce qu'on peut attendre sur ce cas d'école.

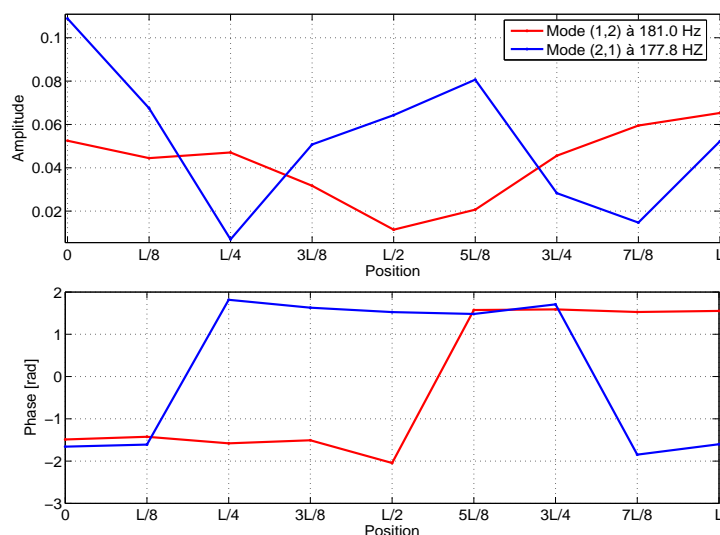


FIG. 8 – Séparation des deux modes jumeaux : amplitudes et phases déduites de mesures vibratoires sur la ligne inférieure  $\Delta_1$  de la plaque.

## 4 Conclusions

La méthode d'analyse modale mise en œuvre dans cette étude a permis de résoudre des cas où la transformée de Fourier s'avère difficile à utiliser. Le caractère haute résolution de l'analyse est illustré par les faibles incertitudes sur la fréquence modale et l'amortissement modal d'une composante isolée. Deux modes jumeaux ont été séparés avec succès grâce à cette méthode d'analyse modale sans transformée de Fourier. L'extension de la procédure d'évaluation des incertitudes au cas des modes proches est en cours.

## Références

- Badeau R. 2005 Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées - Application aux signaux de musique. *Thèse de doctorat de l'ENST, Paris*
- Lozada J., Boutillon X., David B. 2006 Analyse modale sans Transformée de Fourier *Congrès Français d'Acoustique, Tours, 24-27 Avril 2006*
- Roy R., Kailath T. 1989 ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques *IEEE Trans. on Acous., Speech, and Sig. Proc.* **37** (7) pp. 984-995
- Roy R., Paulraj A., Kailath T. 1986 ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise *IEEE Trans. on Acous., Speech, and Sig. Proc.* **34** (5) pp. 1340-1342